

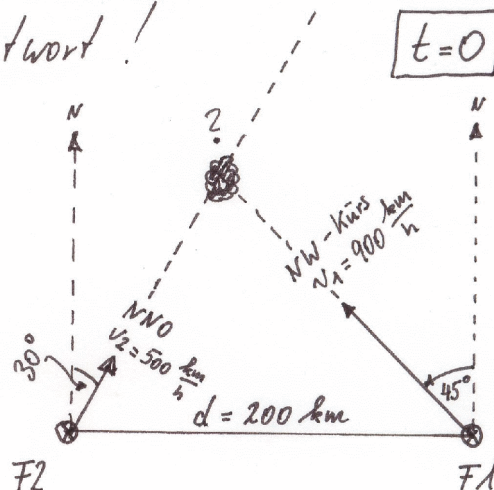
Musteraufgabe zur Kinetik mit Hilfe der Vektorrechnung

Musteraufgabe zur Vektorrechnung 13.10.2001

Aufgabe : Ein Flugzeug fliegt mit $900 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf einem exakten Nordwest-Kurs. In gleicher Höhe, aber 200 km weiter westlich, fliegt eine 2. Maschine deutlich langsamer mit $500 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf Kurs NNO (von Norden 30° nach Osten ...). Werden beide kollidieren? Begründe die Antwort!

Lösungsweg :

(1.) Skizze anfertigen!



(2.) Was heißt „kollidieren“?

$\Rightarrow$ „zur selben Zeit t am selben Ort $\vec{s}$ “!

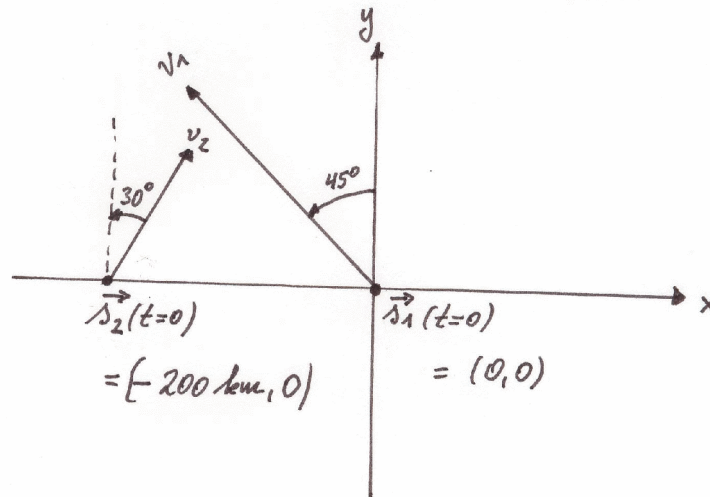
$\Rightarrow$ mathematisierter Ansatz

$$\vec{s}_2(t) = \vec{s}_1(t) \quad \text{für irgendein } t$$

(3.) Wahl des Koordinatensystems! Bei $t=0$ befinden sich beide Flugzeuge wie in (1.) gezeichnet.

(1)

sinnvolle Wahl : Ursprung in F1, x-Achse nach Osten,
y-Achse nach Norden.



(4.) Beschreibe Bewegung in diesem Koordinatensystem !

$$\vec{r}_1(t) = (0,0) + \vec{v}_1 \cdot t$$

$$\vec{r}_2(t) = (-200 \text{ km}, 0) + \vec{v}_2 \cdot t$$

mit $\vec{v}_1 = (\underbrace{-v_1 \cdot \sin 45^\circ}_{\text{Anteil von } v_1 \text{ nach Westen, daher "-"}}, \underbrace{v_1 \cdot \cos 45^\circ}_{\text{Anteil von } v_1 \text{ nach Norden}}) = v_1 \cdot (-\sin 45^\circ, \cos 45^\circ)$

Anteil von v_1
nach Westen,
daher "-"

Anteil von v_1
nach Norden $= \frac{v_1}{\sqrt{2}} (-1, 1)$

und $\vec{v}_2 = (v_2 \cdot \sin 30^\circ, v_2 \cos 30^\circ) = v_2 (1/2, \sqrt{3}/2)$

merke : jeder Vektor lässt sich zerlegen :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix}$$

② $\vec{v}_x = \text{Anteil in x-Richtung}$

wir erhalten also "fertige" Bewegungsgleichungen:

$$\vec{s}_1(t) = \frac{v_1}{\sqrt{2}} (-1, 1) \cdot t$$

$$\vec{s}_2(t) = \frac{v_2}{2} (1, \sqrt{3}) \cdot t + (-200 \text{ km}, 0)$$

- (5.) Nun prüfen wir, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem sich beide Flugzeuge am selben Ort befinden:

$$\vec{s}_1(t) \stackrel{?}{=} \vec{s}_2(t) \quad \text{Das bedeutet, sowohl } x\text{- als auch } y\text{-Komponente sind gleich...}$$

besser lesbar: Spaltenweise ...

$$\frac{v_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t = \frac{v_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} -200 \text{ km} \\ 0 \end{pmatrix}$$

in x-Richtung: $-\frac{v_1 \cdot t}{\sqrt{2}} = \frac{v_2 \cdot t}{2} - 200 \text{ km} \quad (x) \quad \backslash \quad \text{beide müssen erfüllt sein!}$

in y-Richtung: $\frac{v_1 \cdot t}{\sqrt{2}} = \frac{v_2 \cdot t}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (y) \quad /$

(y) kann nur erfüllt sein, wenn $v_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot v_2$ gilt,

$$\text{hier aber: } \frac{v_1}{v_2} = \frac{900 \text{ km/h}}{500 \text{ km/h}} = \frac{9}{5} \neq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

- (6.) Antwort: Beide werden sich nicht treffen, da F_1 schneller nach Norden fliegt als F_2 .

(3)