

AB3-Winkelbeschleunigung und zentrale Kräfte

Freitag, 1. Mai 2020 09:43

Die Winkelbeschleunigung

Halten wir zunächst noch einmal fest, dass eine Kreisbewegung immer eine beschleunigte Bewegung ist. Der Vektor der Geschwindigkeit ändert ständig seine Richtung, damit ist zwar der Betrag, aber nicht v konstant.

Für die folgende Herleitung benötigt man eigentlich das mathematische "Kreuzprodukt". Ich gehe da nicht wirklich drauf ein, sondern betrachte mehr das Ergebnis. Ihr könnt daher die Herleitung nicht ganz nachvollziehen!

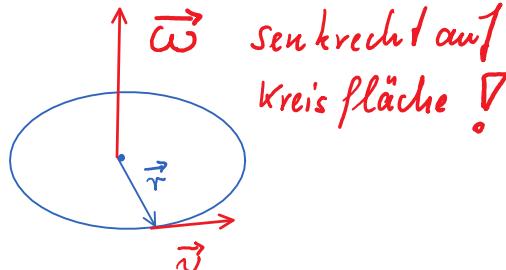
$$\text{Bahngeschwindigkeit } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

"rechte Hand - Regel"

Dannen in Richtung $\vec{\omega}$

Zeige finger in Richtung \vec{r}

Mittelfinger liefert die Richtung von Ergebnis \vec{v}



Für die Beiträge reicht hier immer noch $v = \omega \cdot r$, wir jetzt kennen wir auch die Richtungen!

$$\text{Zur Erinnerung: } \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{v})$$

Die Zentripetale Beschleunigung \vec{a}_z ergibt sich also zu

$$\vec{a}_z = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

\uparrow Produktregel $\vec{\omega}$ ist konstant!
 $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ daher

$$= \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{mit } \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{\vec{r}} \text{ per def!}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

\uparrow $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, s.o.ben \uparrow Rechenregeln
 (Mathe LK Q2)

da $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ folgt $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$

$$\vec{a}_z = \textcircled{-} \vec{r} \cdot \omega^2$$

\uparrow zur Kreismitte hin beschleunigt!

Da wir i.d.R. nur Beträge betrachten, gilt ganz einfach:

$$\text{Zentripetale Beschleunigung } a_z = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

Warum heißt die „Winkelbeschleunigung“ nun zentripetale Beschleunigung?

→ Weil diese eine Richtung zum Zentrum hin gerichtet hat!

Wenn eine Masse beschleunigt wird, so braucht es auch eine Kraft!

für Erinnerung: $\vec{F} = m \vec{a}$ (Grundgleichung des Mechanik)

hier: \vec{a}_z als zentripetale Beschleunigung

also \vec{F}_z als zentripetale Kraft! Diese muss wirken, um eine Masse m bei einer Geschwindigkeit v auf eine Kreisbahn r zu bringen und ist immer zum Mittelpunkt hin gerichtet!

$$\text{Zentripetalkraft } F_z = m \cdot a_z = \frac{m v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$