

AB3-Winkelbeschleunigung und zentrale Kräfte

Freitag, 1. Mai 2020 09:43

Die Winkelbeschleunigung

Halten wir zunächst noch einmal fest, dass eine Kreisbewegung immer eine beschleunigte Bewegung ist. Der VEKTOR der Geschwindigkeit ändert ständig seine Richtung, damit ist zwar der Betrag, aber nicht v konstant.

Für die folgende Herleitung benötigt man eigentlich das mathematische "Kreuzprodukt". Ich gehe da nicht wirklich drauf ein, sondern betrachte mehr das Ergebnis. Ihr könnt daher die Herleitung nicht ganz nachvollziehen!

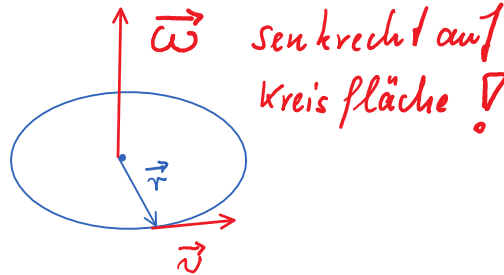
Bahngeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

"rechte Hand - Regel"

Daumen in Richtung $\vec{\omega}$

Zeigefinger in Richtung \vec{r}

Mittelfinger liefert die Richtung vom Ergebnis \vec{v}



Für die Beträge reicht hier immer noch $v = \omega \cdot r$, wir setzen kennen wir auch die Richtungen!

Zur Erinnerung: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{v})$

Die Zentripetalbeschleunigung \vec{a}_z ergibt sich also zu

$$\vec{a}_z = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

↑ Produktregel
↑ $\vec{\omega}$ ist konstant!
 $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ daher

$$= \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{mit } \vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \dot{\vec{r}} \text{ per def. !}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

↑ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, s. oben

Rechenregeln
(Mathe LK Q2)

da $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ folgt $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$

$$\vec{a}_z = \ominus \vec{r} \cdot \omega^2 \quad \text{zur Kreismitte hin beschleunigt!}$$

Da wir i.d.R. nur Beträge betrachten, gilt ganz einfach:

$$\text{Zentripetal beschleunigung } a_z = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

Warum heißt die „Winkel beschleunigung“ nun Zentripetal beschleunigung?

→ weil diese eine Richtung zum Zentrum hin gerichtet hat!

Wenn eine Masse beschleunigt wird, so braucht es auch eine Kraft!

Zur Erinnerung: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (Grundgleichung der Mechanik)

hier: \vec{a}_z als Zentripetal beschleunigung

also \vec{F}_z als Zentripetal kraft! Diese muß wirken, um eine Masse m bei einer Geschwindigkeit v auf eine Kreisbahn r zu bringen und ist immer zum Mittelpunkt hin gerichtet!

$$\text{Zentripetal kraft } F_z = m \cdot a_z = \frac{m v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$